ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ КАК ПУТЬ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

И.Н.Реутова,
учитель,
учебно-воспитательный комплекс «Технический лицей – общеобразовательная школа I-IIступеней»,
г. Мариуполь, УКРАИНА

Одна з приоритетних задач, що стоять перед освітою, є розвиток здібностей учнів, залучення їх до дослідницької діяльності. В статті запропоновано один з шляхів формування дослідницьких вмінь учнів в рамках вивчення змістової лінії „Функції" через систему задач, які потребують дослідження функцій.

Подготовка молодежи к творческому труду невозможна без внедрения в учебный процесс современной школы учебно-исследовательской работы как важного средства формирования стойкого интереса и готовности к творческой деятельности у учащихся. Сформированные у них на ранних этапах познавательный интерес, творческие наклонности, исследовательские умения – хороший фундамент становления будущих квалифицированных специалистов.

Реализацию этих задач мы видим в обогащении школьного курса математики таким учебным материалом, который мог бы обеспечить возможность учащимся активно включаться в исследовательскую деятельность.

Содержательная линия «Функции» открывает огромные возможности для формирования исследовательских умений учащихся.

Анализ действующих учебников говорит о том, что исследовательские задачи по темам этой содержательной линии представлены в них немногочисленно. В основном это задачи математического содержания. Практически нет прикладных задач, требующих исследования реальных процессов с помощью математического аппарата.

Так в учебнике [2] задачи №466, 495, 536, 537, 115, 201, 351, 354, 355 можно отнести к задачам исследовательского характера, прикладные задачи №427, 428, 481-483.

В учебнике [3] представляют интерес разобранные задачи о радиоактивном распаде, об изменении атмосферного давления, о размножении бактерий, о вакуумировании, о приращении древесины, которые демонстрируют использование показательной функции при изучении явлений окружающей среды. Однако совсем не приводится исследовательских и прикладных заданий для самостоятельной работы учащихся.

В учебнике [4] таким задачам уделено больше внимания. Задачи на оптимум представлены в №51(1-9), применение интеграла – в №61-72, применение дифференциальных уравнений – в №78-82.

В учебном пособии [8] авторы приводят примеры того, как с помощью показательной функции можно описывать явления окружающей среды для дальнейшего их исследования. Но только задачи №16,17 §5 из раздела VII посвящены исследованию реальных процессов с помощью функций.

Заслуживает внимания учебники [6], [7]. Исследовательские задачи содержательной линии «Функции» представлены в них более многочисленно.

Учащиеся основной и старшей школы, знакомясь со свойствами функций, не видят возможностей применения этих знаний к решению задач как математического, так и прикладного содержания. Задания по исследованию функций на четность (нечетность), периодичность, монотонность, ограниченность воспринимаются учащимися как отдельный класс задач, которые в лучшем случае могут найти применение при построении графиков.

Только лишь в учебнике [5] авторы предлагают в №11 § 1 раздела III построить графики функций, используя их четность или нечетность.

Ни в одном учебнике не рассмотрен вопрос об исследовании функций при решении уравнений и неравенств. Лишь в учебнике [7] в п.11 §3 приводится один пример использования монотонности при решении показательного уравнения и №101 для самостоятельного решения.

В учебнике [4] вводится понятие ограниченной функции, однако не рассматривается вопрос о том, как ее можно применить при решении уравнений. А с понятием обратной функции школьник сталкивается лишь тогда, когда знакомится с функциями $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_a x$, обратными тригонометрическими функциями.

На наш взгляд, система задач, в которых требуется исследование функций, является тем материалом, который позволит включить учащихся в эвристическую деятельность, формировать учебные исследовательские умения.

Например, знакомясь со свойствами графиков четных и нечетных функций, учащиеся могут сделать вывод о том, что если $x_0 \neq 0$ – корень уравнения f(x)=0, где f(x) четная или нечетная функция, то $-x_0$ также является корнем этого уравнения. А если уравнение f(x)=0, где f(x) четная или нечетная функция, имеет единственный корень, то этот корень x=0.

На основе отмеченного, школьники делают вывод о том, что в таких уравнениях достаточно найти лишь положительные корни, присоединить к ним противоположные числа и проверить число 0.

Пример 1. Решить уравнение

$$2^{|x|} = |x+1| + |x-1|.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 2^{|x|} - |x+1| - |x-1|$. Функция f(x) – четная. Найдем положительные корни уравнения (x>0).

$$2^x = |x-1| + x + 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2^x = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0, \\ 2^x = 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ x = 1, \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x = 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

В силу четности функции f(x) можно сделать вывод, что корнями уравнения являются x= -1, x= -2.

Проверим, является ли x=0 корнем данного уравнения. Подстановка показывает, что x=0 – не корень уравнения.

Ответ: $\pm 1; \pm 2$.

Пример 2. При каких а уравнение $x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$ *имеет единственное решение.*

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{10} - a|x| + a^2 - a$. Поскольку она четная, то единственным решением исходного уравнения может быть только x=0. Найдем те значения a, при которых x=0 является корнем этого уравнения.

f(0)=0, $a^2 - a = 0$, $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1. \end{array}\right.$

При a=0 исходное уравнение принимает вид $x^{10} = 0$. Откуда x=0 – единственный корень.

При a=1 уравнение принимает вид $x^{10} - |x| = 0$. Найдем неотрицательные решения этого уравнения (x≥0).

$x^{10} - x = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$ В данном случае уравнение имеет не одно решение.

Ответ: 0.

Пример 3. Найти сумму корней уравнения $\log_{\frac{1}{2}}|x| = \frac{1}{3}\left(|x-2| + |x+2|\right)$.

При знакомстве с понятием ограниченности функций, после того как учащиеся исследовали на ограниченность, например, функции $y = \frac{x^{12}+16}{4x^6}$ и $y = -x^{24} + 32x^{12} - 254$ полезно предложить для решения такие задачи.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x^{12}+16}{4x^6} = -x^{24} + 32x^{12} - 254.$$

Решение. $\frac{x^{12}+16}{4x^6} = \frac{x^6}{4} + \frac{4}{x^6} \ge 2$.

$$-x^{24} + 32x^{12} - 254 = -(x^{24} - 32x^{12} + 254) =$$
$$= 2 - (x^{12} - 16)^2 \le 2.$$

Значит исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{x^{12}+16}{4x^6} = 2 \\ 2 - (x^{12} - 16)^2 = 2. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} x^6 = 4, \\ x^{12} = 16; \end{cases}$ $x = \pm\sqrt[6]{4}$. Ответ: $\pm\sqrt[6]{4}$.

При решении таких задач учащиеся не только должны «увидеть» ограниченную функцию, но и выбрать рациональный способ обоснования ее ограниченности.

Пример 5. Решить уравнение $\log_2\left(1 + \sqrt{x^2 + x^4}\right) + \log_2\left(1 + x^6\right) = 0$.

Пример 6.

$$\frac{\left|x^2 - a(2x - a) + 4\right|}{x - a} \le -x^2 + 6x - 5.$$

При знакомстве со свойством монотонности функций учащиеся без труда делают вывод о том, что если функция f(x) возрастает (или убывает) на некотором множестве P, то на этом множестве уравнение f(x)=a имеет не более одного корня. А уравнение f(x)=g(x) имеет не более одного корня на некотором множестве P, если функция f(x) возрастает, а функция g(x) убывает на этом множестве.

Пример 7. Решить уравнение

$$x^5 + 7x^3 + 4x - 3 = 9.$$

Решение. Нетрудно заметить, что x=1 является корнем уравнения. Функция $f(x)=x^5+7x^3+4x-3$ возрастает на R. Значит, исходное уравнение больше корней не имеет.

Ответ: 1.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt[28]{x-243} + \sqrt[5]{x} = \frac{3}{\sqrt[7]{x-242}}.$$

В классах с углубленным изучением математики, можно рассмотреть вопрос о равносильности уравнений f(x)=x и f(f(x))=x на некотором множестве P, в случае если функция f(x) возрастает на этом множестве.

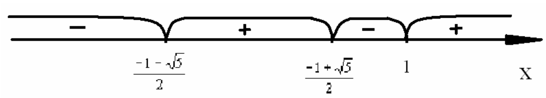
Пример 9. Решить неравенство:

$$\frac{1 + \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2} \le x.$$

Решение. Неравенство имеет вид $f(f(x)) \le x$, где $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$. Решаем неравенство методом интервалов. Найдем корни уравнения $f(f(x)) = x$.

$\frac{1 + \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2} = x$. Данное уравнение равносильно уравнению $\frac{x^3+1}{2} = x$;

$$x^3 - 2x + 1 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right].$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$.

При решении таких заданий, когда исследование функции на монотонность является не целью, а лишь средством решения задачи, особенно актуальным для учащихся становится вопрос выбора рационального метода исследования, то ли с помощью производной, то ли на основе свойств монотонных функций.

Учащимся классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики при знакомстве с понятием обратной функции и ее свойствами будет полезно познакомиться со следующей теоремой: пусть f(x) и g(x) обратные функции. Если f(x) – возрастающая, то уравнения f(x)=g(x) и f(x)=x равносильны. Если f(x) – убывающая, то уравнение f(x)=g(x) является следствием уравнения f(x)=x.

Пример 10. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt[3]{x-9}+3=(x-3)^3+9$.

Функции $f(x)=\sqrt[3]{x-9}+3$ и $g(x)=(x-3)^3+9$ обратные и возрастающие. Значит, исходное уравнение равносильно уравнению: $(x-3)^3+9=0$,

$x^3-9x^2+26x-18=0$,

$(x-1)(x^2-8x+18)=0$, x=1.

Ответ: 1.

Пример 11. Решить уравнение: $1+\cos^6 x=2\sqrt[3]{\cos 2x}$.

При решении подобных заданий невозможно действовать по «шаблону». Учащиеся вынуждены проявлять творчество, как в выборе свойства функции, которое поможет решить уравнение или неравенство, так и в выборе метода исследования (с помощью производной, метод оценки, свойства монотонных функций и т.д.).

При решении таких задач у учащихся формируются такие эвристические умения, как подведение задачи под определенный тип, переформулировка задачи в другом ключе, видоизменение задачи, с целью сведения ее к определенному типу, перебор вариантов решения, оценивание рациональности решения еще до получения результата.

Таким образом, вовлекая учащихся в решение таких заданий, мы способствуем формированию таких эвристик как аналогия, классификация, обобщение, сравнение, «нарисуй картинку», перебор вариантов и др. А это те «кирпичики», из которых складываются исследовательские умения учащихся, путь воспитания успешно мыслящей и действующей личности.

1. *Державний стандарт базової і повної середньої освіти. Ж-л Математика в школах України, №4(52), 2004р.*
2. *Бевз Г.П. Алгебра: Проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – Доп. М-вом освіти України. – К.:Освіта, 1998.*
3. *Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002.*
4. *Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002.*
5. *Коваленко В.Г., Кривошеєв В.Я., Старосєльцева О.В. Алгебра: Експерим. навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. вивченням математики і спеціалізов. шк. фізико-мат. профілю. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 1998.*
6. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М.. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 10 кл.з поглибл. вивч. математики в серед. закладах освіти. – К.: Освіта, 2000.*
7. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 11 кл.з поглибл. вивч. математики в серед. закладах освіти. – К.: Освіта, 2001.*
8. *Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика 10-11: Проб. навч. посіб. для шк., ліцеїв та гімназій гуманіт. профілю. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 2001. – 224 с.*

Резюме. **Реутова И.Н. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ КАК ПУТЬ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ.** *Одна из приоритетных задач, которые стоят перед образованием, является развитие способностей учащихся, приобщения их к исследовательской деятельности. В статье предложен один из путей формирования исследовательских умений учащихся в рамках изучения содержательной линии «Функции» через систему задач, в которых требуется исследование функций.*

Summary. **Reutova I. FORMING RESEARCH SKILLS IN THE STUDYING OF FUNCTIONS.** *Article deals with the problem of using varieties of characteristics while solving equations and inequalities with the aim of forming pupils' research skills.*

Надійшла до редакції 17.11.2005 р.